ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGÔ THỊ BẮC

PHƯƠNG PHÁP VỊ TRÍ SAI KÉP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGÔ THỊ BẮC

PHƯƠNG PHÁP VỊ TRÍ SAI KÉP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8460113

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên, 10/2018

Mục lục

Mở đầu

Nội dung *Giải phương trình và hệ phương trình* đã được giảng dạy trong trường phổ thông thường chỉ dừng lại ở kỹ thuật giải (phương pháp biến đổi tương đương, đặt ẩn phụ,...) một số lớp phương trình, hệ phương trình tương đối đơn giản. Mặt khác, các bài toán thực tế thường dẫn đến các phương trình và hệ phương trình phức tạp mà chỉ có thể giải nhờ phương pháp gần đúng. Vì vậy, việc đưa các phương pháp giải gần đúng phương trình và hệ phương trình vào chương trình phổ thông là có ý nghĩa.

Các phương pháp giải gần đúng phương trình và hệ phương trình phi tuyến đã được trình bày khá kĩ trong các giáo trình Giải tích số, tuy nhiên, *phương pháp vị trí sai* và *phương pháp vị trí sai kép* còn chưa được quan tâm đúng mức trong các tài liệu tiếng Việt.

Luận văn này có mục đích trình bày các phương pháp giải gần đúng phương trình và hệ phương trình, đặc biệt là *phương pháp vị trí sai* và *phương pháp vị trí sai kép*. Luận văn cố gắng minh họa các phương pháp giải gần đúng thông qua các ví dụ tính toán trên máy. Luận văn cũng cố gắng tìm hiểu và trình bày lịch sử của phương pháp vị trí sai kép.

Luận văn trình bày các phương pháp số giải phương trình và hệ phương trình, đặc biệt là phương pháp vị trí sai và phương pháp vị trí sai kép trong hai chương:

Chương 1. Các phương pháp số giải gần đúng phương trình

Nhằm kết nối và làm sáng tỏ phương pháp vị trị sai và phương pháp vị trí sai kép trình bày trong Chương 2, chương này trình bày tổng quan các phương pháp số giải gần đúng phương trình.

Chương 2. Phương pháp vị trí sai kép

Chương này trình bày phương pháp vị trí sai đơn và phương pháp vị trí sai kép giải phương trình đa thức và giải hệ phương trình tuyến tính.

Luận văn được hoàn thành tại Khoa Toán–Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Tạ Duy Phượng.

Tác giả xin được tỏ lòng biết ơn tới lãnh đạo Khoa Toán–Tin và các khoa chức năng của trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn đúng thời hạn.

Tác giả xin chân thành cám ơn PGS.TS Tạ Duy Phượng đã tận tình hướng dẫn tác giả nghiên cứu đề tài và viết luận văn.

Xin được cám ơn trường trung học phổ thông Hàn Thuyên đã tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành nhiệm vụ.

Xin được cám ơn gia đình đã thông cảm và động viên khích lệ tác giả hoàn thành khóa học.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Người viết luận văn

Ngô Thị Bắc

Chương 1

Các phương pháp số giải gần đúng phương trình

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu bài toán tìm nghiệm phương trình phi tuyến, các phương pháp số giải phương trình phi tuyến, bao gồm phương pháp chia đôi, phương pháp lặp, phương pháp Newton, phương pháp dây cung. Các phương pháp được trình bày chi tiết thuật toán và ví dụ minh họa, có so sánh giữa các phương pháp.

1.1 Kiến thức chuẩn bị

Nhiều bài toán trong khoa học và kỹ thuật được phát biểu như sau.

Bài toán 1.1.1 ([4])**.** Cho hàm liên tục $f(x)$, tìm số $x = \xi$ sao cho $f(\xi) = 0$.

Các bài toán này được gọi là bài toán tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Định nghĩa 1.1.2 ([4])**.** Số $x = \xi$ thỏa mãn $f(\xi) = 0$ được gọi là một *nghiệm* của phương trình $f(x) = 0$ hay một *không điểm* của hàm $f(x)$.

Hàm $f(x)$ có thể là hàm liên tục phi tuyến bất kì.

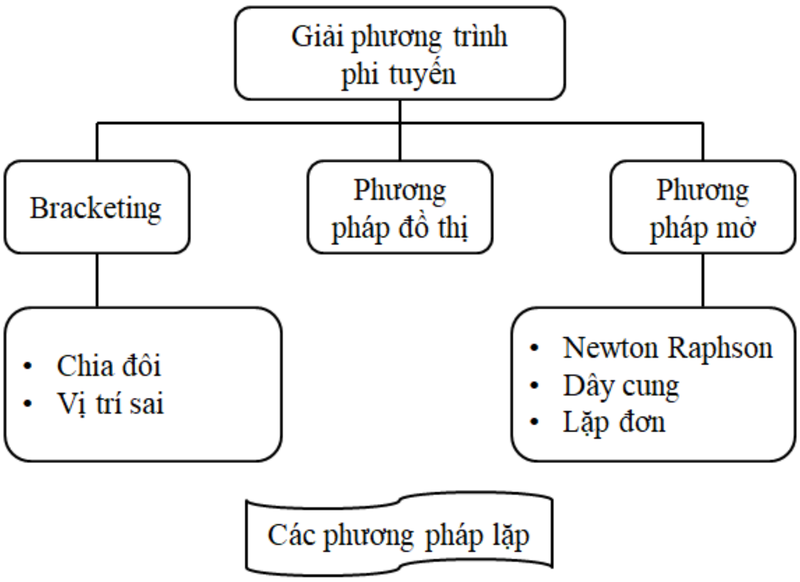
Một số cách giải phương trình phi tuyến có thể là:

1. Tìm nghiệm giải tích: chỉ thực hiện được với một số phương trình đặc biệt.

2. Phương pháp đồ thị: hữu ích cho việc đưa ra dự đoán ban đầu cho các phương pháp khác.

3. Phương pháp số: gồm các phương pháp mở và các phương pháp bracket (khoảng). Các phương pháp bracket bắt đầu với khoảng phân ly chứa nghiệm và sử dụng một thủ tục để thu được khoảng phân ly nhỏ hơn chứa nghiệm. Ví dụ như phương pháp chia đôi, phương pháp vị trí sai. Trong các phương pháp mở, phương pháp bắt đầu với một dự đoán ban đầu. Trong mỗi lần lặp, ta tìm một dự đoán mới của nghiệm. Các phương pháp mở thường hữu ích hơn phương pháp bracket nhưng có thể chúng không hội tụ tới nghiệm. Một số phương pháp mở thường gặp là phương pháp lặp đơn, phương pháp Newton-Raphson, phương pháp dây cung.

Cách phân loại các phương pháp giải phương trình phi tuyến được minh họa trong hình sau.



Hình 1.1: Phân loại các phương pháp giải phương trình phi tuyến

Hầu hết các phương pháp số tìm nghiệm về bản chất là phương pháp lặp. Ý tưởng của phương pháp lặp là: *Bắt đầu với một phép xấp xỉ ban đầu* x_0*, xây dựng một dãy lặp* $\{x_k\}$ *bằng một công thức lặp với hy vọng rằng dãy này hội tụ tới một nghiệm của* $f(x) = 0$.

Hai khía cạnh quan trọng của phương pháp lặp là: *sự hội tụ* và *tiêu chuẩn* *dừng*. Việc xác định một tiêu chuẩn dừng thống nhất là phức tạp vì nhiều lý do. Dưới đây là một tiêu chuẩn thô, có thể được sử dụng để dừng một phép lặp trong một chương trình máy tính.

Tiêu chuẩn dừng của phương pháp lặp tìm nghiệm ([4])

Chấp nhận $x = c_k$ là một nghiệm của $f(x) = 0$ nếu thỏa mãn một trong các tiêu chuẩn sau:

1. $|f(c_k)| \leq \varepsilon$ (Giá trị hàm nhỏ hơn hoặc bằng giới hạn chấp nhận được).
2. $\dfrac{|c_{k-1} - c_k|}{|c_k|} \leq \varepsilon$ (Sự thay đổi tương đối nhỏ hơn hoặc bằng giới hạn chấp nhận được).
3. Số lần lặp k lớn hơn hoặc bằng một số N xác định trước.

1.2 Phương pháp chia đôi

Như tên gợi ý từ tên của phương pháp, phương pháp này dựa trên việc chia đôi liên tục một khoảng chứa nghiệm. Ý tưởng chính của phương pháp rất đơn giản.

Ý tưởng chính: Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thực $x = \xi$ nằm trong đoạn $[a, b]$.

1. Chia đôi đoạn $[a, b]$ và đặt $c = \dfrac{a+b}{2}$ là điểm nằm giữa của $[a, b]$. Nếu $f(c) = 0$ thì c là nghiệm. Ngược lại, một trong hai đoạn $[a, c]$ hoặc $[c, b]$ sẽ chứa nghiệm.
2. Tìm đoạn mà chứa nghiệm và tiếp tục chia đôi đoạn đó.
3. Tiếp tục quá trình chia đôi cho tới khi nghiệm nằm trong một đoạn đủ nhỏ sao cho đảm bảo độ chính xác yêu cầu.

Để thực thi ý tưởng trên, ta phải biết trong mỗi phép lặp đoạn nào trong hai đoạn chứa nghiệm của $f(x) = 0$.

Định lý giá trị trung gian trong giải tích giúp ta xác định khoảng trong mỗi phép lặp. Chứng minh của định lý này có thể xem trong giáo trình giải tích.

Định lý 1.2.1 (Định lý giá trị trung gian)**.** *Giả sử*

(i) *$f(x)$ liên tục trên đoạn đóng $[a, b]$, và*

(ii) *M là một số bất kỳ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$.*

Khi đó, tồn tại ít nhất một số c thuộc $[a, b]$ sao cho $f(c) = M$.

Hệ quả: *Giả sử*

(i) *$f(x)$ liên tục trên đoạn đóng $[a, b]$, và*

(ii) *$f(a)$ và $f(b)$ ngược dấu.*

Khi đó tồn tại một nghiệm $x = c$ của $f(x) = 0$ trong đoạn $[a, b]$.

Thuật toán 1.2.2 (Phương pháp chia đôi, [4])**.**

Đầu vào: $f(x)$ là hàm cho trước, a_0, b_0 là hai số thỏa mãn $f(a_0)f(b_0) < 0$.

Đầu ra: Một phép xấp xỉ nghiệm của $f(x) = 0$ trong $[a_0, b_0]$.

Với $k = 0, 1, 2, \ldots$, thực hiện cho tới khi thỏa mãn:

- Tính $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
- Sử dụng tiêu chuẩn dừng kiểm tra nếu c_k là nghiệm cần tìm. Nếu đúng thì dừng.
- Nếu c_k không là nghiệm cần tìm, kiểm tra nếu $f(c_k)f(a_k) < 0$. Nếu đúng, đặt $b_{k+1} = c_k$ và $a_{k+1} = a_k$. Nếu ngược lại, đặt $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$.

Kết thúc. □

Ví dụ 1.2.3. Tìm nghiệm dương của $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ bằng phương pháp chia đôi.

Giải.

Tìm đoạn $[a, b]$ chứa nghiệm. Vì phương pháp chia đôi tìm nghiệm trong một đoạn $[a, b]$ cho trước, đầu tiên ta phải tìm đoạn $[a, b]$ trước. Ta thực hiện theo định lý giá trị trung gian. Cho $a_0 = 2.5$ và $b_0 = 4$. Cả hai giả thiết trong định lý giá trị trung gian đều đúng với $f(x)$ trên đoạn $[2.5, 4]$.

(i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ liên tục trên $[2.5, 4]$.

(ii) $f(2.5)f(4) = (-0.375).6 < 0$.

Do đó, theo định lý giá trị trung bình tồn tại nghiệm của $f(x) = 0$ trong $[2.5, 4]$.

Dữ liệu đầu vào.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
$$a_0 = 2.5, \quad b_0 = 4.$$

Lặp lần 1 $(k = 0)$:

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 3.25.$$

Vì $f(c_0)f(a_0) = f(3.25)f(2.5) < 0$, đặt $b_1 = c_0, a_1 = a_0$.

Lặp lần 2 $(k = 1)$:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 2.8750.$$

Vì $f(c_1)f(a_1) > 0$, đặt $a_2 = c_1 = 2.8750, b_2 = b_1$.

Lặp lần 3 $(k = 2)$:

$$c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 3.0625.$$

Vì $f(c_2)f(a_2) = f(3.0625)f(2.875) < 0$, đặt $b_3 = c_2, a_3 = a_2$.

Lặp lần 4 $(k = 3)$:

$$c_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 2.9688.$$

Rõ ràng các phép lặp hội tụ dần nghiệm chính xác $x = 3$. □

Chú ý 1.2.4.

1. Từ phát biểu của thuật toán chia đôi, thuật toán luôn luôn hội tụ tới nghiệm.
2. Tuy nhiên, tốc đội hội tụ của phương pháp chia đôi có thể rất chậm.
3. Có thể ở một lần lặp thứ k nào đó xảy ra việc tính c_k có thể bị quá giới hạn máy tính. Tốt hơn ta nên tính c_k bằng

$$c_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}.$$

Tiêu chuẩn dừng

Vì đây là một phương pháp lặp, ta phải xác định một số tiêu chuẩn dừng mà cho phép phép lặp kết thúc. Dưới đây là một số tiêu chuẩn dừng thường gặp.